

REMARQUES
AU SUJET DE LA STABILITÉ
DE LA
COUPOLE DU MAUSOLÉE DE TAMERLAN
À SAMARCANDE ⁽¹⁾

PAR

M. D. LIMONGELLI, ING. E. I. L.

1. Dans sa remarquable conférence sur *L'Évolution du dôme dans l'architecture persane* (à la séance de février dernier de notre Institut), M. Creswell ayant effleuré la question de la stabilité de la coupole du mausolée de Tamerlan à Samarcande, j'ai été amené à faire quelques remarques, notamment sur le rôle des tirants, employés par les constructeurs de cette voûte.

J'expose ces remarques aujourd'hui avec plus de détail.

L'histoire de l'art de bâtir ne comporte-t-elle pas, nécessairement, une partie importante d'explications techniques? C'est là mon excuse; et tout en étant aussi bref que possible, je n'en demande pas moins indulgence à mes auditeurs de venir les entretenir sur un sujet un peu trop spécial.

• •

2. Il est évident qu'il nous fallait, avant tout, avoir une représentation aussi exacte que possible de ce monument. Or ce que nous avons trouvé de mieux à ce sujet, c'est le relevé reporté dans l'ouvrage de Simakoff : *Les Arts décoratifs de l'Asie centrale*. Cet ouvrage, publié en 1884, est, paraît-il,

⁽¹⁾ Communication faite à l'Institut d'Égypte dans sa séance du 1^{er} mai 1922.

très rare. Il est heureux que la Bibliothèque Royale du Caire en possède un exemplaire, catalogué sous le n° A. 973.

C'est là que nous avons puisé les renseignements géométriques nécessaires à notre étude, et nous tenons ici à remercier le Directeur de la Bibliothèque de nous avoir permis de reproduire les trois clichés de la planche V qui représentent ce monument.

Ces trois photographies, néanmoins, ne suffisent pas pour donner, avec toute certitude, les éléments intéressants pour un examen de la stabilité de cette structure. Une section horizontale de la coupole aurait été très utile, afin de définir la forme exacte des douze contreforts intérieurs.

Il y a, en outre, à noter certaines imperfections de dessin, notamment dans l'échelle du dessin, qui laissent subsister quelques doutes. Cette échelle est figurée en unités russes : le *saschen* qui vaut sept pieds anglais, soit 2 m. 1336, et se divise en trois *arschin* de 0 m. 711 mill.

Nous avons cherché à interpréter de notre mieux les seuls dessins à notre disposition et avons représenté dans les tableaux que je vous expose les résultats géométriques obtenus.

La planche I donne la coupe verticale et les dimensions qui résultent de l'application de l'échelle figurée dans l'ouvrage de Simakoff. Cette coupe verticale a été reproduite par plusieurs auteurs.

Mais la planche II, coupe horizontale, ne se trouve dans aucun ouvrage, nous semble-t-il; nous l'avons établie en interprétant la coupe verticale.

*
* *

3. Au point de vue historique, et technique aussi, je vous signale une très intéressante étude du savant architecte Ugo Monneret de Villard, professeur à l'École polytechnique de Milan et actuellement de passage au Caire.

Dans cette étude, qui a pour titre : *Sur l'origine de la double coupole persane*, l'auteur expose les raisons pour lesquelles il refuse d'admettre que la coupole de Samarcande ait eu comme modèle celle de la mosquée omayyade de Damas, reconstruite vers 1082, par Malik Châh, tandis que cette dernière hypothèse a été soutenue par l'archéologue Creswell dans *The Indian Antiquary*, XLIV, 1915, p. 133 et suiv., sous le titre : *The History and Evolution of the Dome in Persia*.

4. Le mausolée de Timur, le Goûr Émir de Samarcande, possède effectivement deux coupoles; et laissant de côté toute considération historique ou artistique, nous relèverons tout de suite que la voûte intérieure n'a qu'une influence minime sur la stabilité générale de ce monument. Il est facile de s'en rendre compte immédiatement, en remarquant que la masse de la coupole supérieure du dôme est approximativement quatorze fois plus importante que celle de la coupole intérieure, et dix-sept fois environ en tenant compte des contreforts. C'est donc surtout l'étude de la coupole extérieure qui intéresse la stabilité.

Les procédés habituels de calculs de coupole, connus de nos jours, ne donnent, en vérité, qu'une solution approchée du problème; je dirai même qu'ils ne constituent, en somme, qu'un calcul de simple contrôle empirique.

Malgré les grands progrès accomplis, au cours du dernier siècle, dans la théorie de l'élasticité, le calcul des voûtes en forme de coupole par la théorie élastique, qui trouve pourtant une application remarquable dans les voûtes en berceau, est encore pratiquement insurmontable.

Par contre, le calcul des coupoles par les méthodes ordinaires est d'une simplicité extrême. La seule règle du parallélogramme pour la composition des forces est nécessaire, à la rigueur.

Aussi empiriques qu'on veuille les supposer, les méthodes qui ont servi pour établir leurs projets aux constructeurs du Goûr Émir et de toutes les merveilleuses coupoles antérieures, qu'étaient-elles? Possédaient-ils ces premières notions, si simples, de mécanique, dont nous venons de parler? L'histoire des Sciences admet aujourd'hui comme inventeur du parallélogramme des forces, Stevin, savant hollandais de la fin du xvi^e siècle. Et ce même principe n'a été clairement énoncé qu'au xvii^e siècle par Newton, dans ses *Principia philosophiæ naturalis*, et la même année, indépendamment de Newton, par Varignon dans un mémoire à l'Académie des Sciences de Paris.

Il est vrai qu'Aristote, dans ses *Problèmes mécaniques* (384-322 avant J.-C.), avait aperçu le principe du parallélogramme du mouvement, ainsi que la notion de force centrifuge; mais cela évidemment d'une façon très confuse, car cet illustre philosophe n'est pas heureux du tout dans les solutions de ses problèmes.

Il ne peut donc être question de procédé de calcul, employé par les constructeurs du Goûr Émir, ni probablement de toutes les voûtes, arcs, ou coupoles de toute époque, depuis leur origine mésopotamienne jusqu'au siècle dernier seulement, où, comme pour éclairer et guider l'instinct du constructeur, la méthode de Méry a vu le jour.

Il est reconnu aujourd'hui, surtout après l'étude du Prof. Ceradini, que la coupole de Saint-Pierre à Rome, construite par Dominique Fontana, successeur de Michel-Ange, est parfaitement stable. Par contre, il est douteux que le projet de ce dernier eût pu être exécuté. Le lanterneau qui surmonte la coupole est beaucoup trop lourd et la saillie des côtes trop faible.

Les calculs de résistance et de stabilité proprement dits n'ont été mis en honneur et en pratique que de nos jours, où des notes de calculs et des épures de statique accompagnent les projets de construction, en établissent les dimensions ou les justifient. Et encore est-il rare qu'on ne corrige certaines parties en cours d'exécution.

Chez les constructeurs anciens il ne faut voir, il me semble, que cet instinct merveilleux, inné en nous, des lois de la stabilité et de la mécanique rendu plus sûr et plus puissant par l'expérience propre ou l'exemple.

* * *

5. La coupole du Goûr Émir a un diamètre maximum de 15 m. 80 cent. et une hauteur, d'après le relevé de Simakoff, de 15 m. 20 cent. depuis la naissance de l'extrados, y compris le bandeau à redans jusqu'à son sommet. Son profil peut donc être inscrit dans un carré légèrement aplati.

Or on sait que les deux figures fondamentales de l'ordre harmonique, dans l'architecture musulmane, sont le carré et le triangle équilatéral. Sous la complexité et la fantaisie des monuments islamiques apparaît toujours, plus ou moins dissimulé, un canevas géométrique qui leur donne un rythme constant d'ordre mathématique.

A ce propos il me semble intéressant de rappeler ici que récemment l'architecte en charge de la cathédrale de Strasbourg a découvert une similitude frappante, dans l'ordre rythmique géométrique, entre cette cathé-

drale et la grande pyramide de Chéops⁽¹⁾. Quelle que soit la valeur de ces études comparatives, de cette recherche des proportions mystérieuses des éléments géométriques fondamentaux de monuments anciens aussi éloignés l'un de l'autre que peuvent nous sembler la pyramide de Chéops et la cathédrale de Strasbourg, le fait de la constance du rythme géométrique dans les monuments islamiques est hors de doute. C'est pourquoi il nous paraît certain que le haut de la coupole du Goûr Émir, tel qu'il est représenté dans les ouvrages, est incomplet.

Sur l'ouverture existante au sommet, ayant près de 75 centimètres de diamètre, qui a pu servir, d'ailleurs, à faire sortir les longues pièces de bois, outillage ou autre, on a dû construire un raccord en maçonnerie formant tampon de fermeture et supportant probablement un ornement en forme de flèche, en métal, comme par exemple celle qui termine la coupole de la mosquée de Kaït Bay.

Ce raccord, que nous pouvons facilement imaginer, ramène la hauteur de la coupole à la dimension du diamètre, et l'élément harmonique, le carré parfait, se trouve reconstitué.

STABILITÉ ET STRUCTURE DE LA COUPOLE.

6. Au point de vue statique, ce qui impressionne dans ce monument c'est le profil extérieur, en forme de bulbe, de la coupole, profil typique qui a eu d'ailleurs l'honneur d'être imité dans les monuments des pays avoisinants, et même avec une certaine exagération, comme en Russie.

Et sans aller trop loin, il suffit de traverser le Delta, par une des voies quelconques de communication, routes ou chemin de fer, pour être frappé du grand nombre de petites coupoles à forme bulbeuse très prononcée qui surmontent les tombeaux de cheikhs honorés dans les villages d'Égypte.

Le profil extérieur, si bizarre au point de vue statique, nous déconcerte au prime abord.

Nous ne retrouvons plus ici les formes stables auxquelles nous sommes accoutumés. Mais l'apparence est trompeuse; et si nous pénétrons à l'in-

⁽¹⁾ Voir *Cosmos*, août 1909, p. 158 et suivantes.

térieur de ce dôme, dans l'espace perdu entre les deux voûtes, nous découvrons immédiatement l'artifice employé et soigneusement caché.

La voûte intérieure, en forme de calotte sphérique, qui d'ailleurs sert seule pour l'effet intérieur, dissimule le procédé de construction employé.

Cet artifice est constitué : par douze contreforts intérieurs soudés à la voûte extérieure et s'appuyant sur les reins de la voûte intérieure; par deux chaînages et par douze tirants aboutissant à un petit massif central posé sur le sommet de la calotte. Ce massif a un volume de 7 mètres cubes environ.

Que des chaînages soient généralement nécessaires pour assurer la stabilité de grandes coupes, c'est une chose connue de tout le monde. A partir d'une certaine région, il se développe le long des parallèles une poussée négative, une tension, qui tend à rejeter les voussoirs au dehors.

Les chaînages empêchent ce mouvement de déjettement au dehors et sont une garantie de plus dans le cas de tremblement de terre, tassement de fondations, etc.

Les contreforts, que nous avons figurés d'après les données de l'ouvrage de Simakoff, ont une action stabilisatrice importante, et constituent une disposition spéciale typique dictée par la forme bulbeuse du profil d'extrados de la coupole, et qu'on ne rencontre pas, je pense, dans les coupes étrangères à l'école persane.

Ces contreforts, par leur masse, ramènent la résultante vers l'intérieur et diminuent la poussée.

H. Saladin, dans son ouvrage *Manuel de l'Art musulman*, s'exprime ainsi à ce sujet : « On voit par cette coupe comment ces dômes bulbeux peuvent se tenir malgré leur encorbellement apparent, contrairement à ce que Coste a figuré dans son ouvrage sur les monuments modernes de la Perse, où il donne une coupe d'un dôme soutenu par une charpente (dôme du medressé Modéré-i-chah Sultan Hussein), ce que je ne crois guère admissible : ces dômes sont construits sur une série de murs convergents et les poussées sont contre-butées par des tirants fixés à des ancrs en fer scellées dans les parois du dôme d'une part et aboutissant de l'autre à un nœud central porté par une pile de maçonnerie ».

C'est une explication brève et très nette de l'agencement statique de ces coupes.

Nous sera-t-il permis d'entrer un peu plus dans les détails, afin de pouvoir apprécier l'habileté du constructeur du tombeau de Tamerlan?

Et d'abord le mode de construction est extrêmement simplifié et rendu très économique par le fait de la présence de ces contreforts.

Jusque vers le sommet, nul besoin de cintres, très coûteux surtout dans un pays dépourvu de bois. La construction par assises horizontales de briques, maniables, facilite l'érection de ces masses énormes.

L'ensemble (contreforts et coupole extérieure) donne un volume d'environ 855 mètres cubes; soit un poids de 1500 tonnes en prenant 1 tonne 750 pour valeur du poids spécifique d'un mètre cube de maçonnerie. Mais l'on sait encore que dans ces pays on employait couramment des briques de facture spéciale, rendues très légères probablement par le mélange d'une très forte quantité de paille qui est consumée par la cuisson et donne une brique très poreuse et très solide. Le poids spécifique pourrait donc être encore réduit peut-être jusqu'à 1 tonne 200 par mètre cube, et ramènerait le poids de la coupole et ses douze contreforts à un peu plus d'un millier de tonnes.

Notons que le seul avantage d'éviter des cintres coûteux justifierait déjà suffisamment l'emploi de ces contreforts, malgré leur masse énorme : 150 mètres cubes environ.

C'est un peu plus que le 21 0/0 du volume de la coupole proprement dite.

Mais le cube de bois nécessaire pour former le cintre de cette coupole serait d'au moins 125 mètres cubes, et en admettant qu'à l'époque de la construction du Goûr Émir, le prix du mètre cube de bois fût seulement six fois plus cher que celui d'un mètre cube de briques, et que 25 mètres cubes de bois soient encore indispensables, malgré la présence des contreforts, on voit que l'économie réalisée est équivalente au prix de 225 mètres cubes au moins de maçonnerie, étant donné encore une récupération possible de 50 0/0 sur le prix du bois après usage.

L'école byzantine avait déjà appris à construire des coupoles sans cintre. Aussi est-il certain que même sans ces contreforts l'architecte du Goûr Émir aurait construit sa coupole sans grands frais de boisage. Le calcul ci-dessus est donc simplement indicatif, car le réel avantage de ces contreforts se manifeste dans l'étude de la stabilité.

C'est ce que nous allons voir, après un petit exposé où quelques recherches personnelles, faites à l'occasion de cette étude, me semblent intéressantes à signaler.

7. Dans le calcul des voûtes en berceau on cherche la poussée à la clef, en partant de certaines prémisses connues qu'il est inutile d'exposer ici. Cette poussée une fois déterminée, reste constante; et combinée successivement avec les poids des voussoirs, on obtient les résultantes sur les joints. De tous ces joints, *un est particulièrement intéressant* : c'est le joint de rupture.

La position de ce joint varie entre des limites assez restreintes quand les variations des surcharges et des épaisseurs de la voûte ne sont pas trop grandes. Plus la surcharge est forte, plus le joint de rupture se rapproche de la clef; tandis que quand l'épaisseur de la voûte augmente, le joint baisse légèrement.

La variation totale, due à cette dernière cause, ne dépasse pas 8 degrés, pourvu que l'épaisseur de la voûte reste comprise entre le 5 o/o et le 20 o/o du rayon.

Pour une même épaisseur de la voûte et une variation de la surcharge mesurée en hauteur de maçonnerie allant de zéro à 80 o/o de la longueur du rayon, le déplacement du joint de rupture vers la clef peut atteindre même 25 degrés.

En pratique, pour une vérification très rapide et dans des conditions moyennes, on considère comme joint de rupture celui qui donne une inclinaison de 60 degrés par rapport à la verticale. Ce procédé très empirique pourrait se justifier par ce que nous venons de dire.

Dans les voûtes en forme de coupole, contrairement à ce qui arrive pour les voûtes ordinaires en berceau, nous n'avons pas une poussée horizontale constante. Chacun des voussoirs, traversés par le même méridien, subit des réactions produites par les voussoirs adjacents, situés sur le même parallèle.

Ces réactions que l'on suppose horizontales, égales et symétriquement placées par rapport au plan méridien moyen du voussoir, donnent lieu à une composante horizontale qui varie de voussoir en voussoir.

En faisant le tracé de la courbe des pressions relative à un onglet, on remarque bien vite que ces composantes horizontales changent de sens à

partir d'un certain joint. Les réactions d'équilibre que l'on doit appliquer sont positives, c'est-à-dire dirigées de l'intérieur vers l'extérieur de la coupole à la partie supérieure, et négatives, c'est-à-dire de l'extérieur vers l'intérieur à partir de ce joint spécial que l'on appelle « point neutre ».

Il est particulièrement intéressant de connaître, à priori, la position de ce point neutre, parce qu'à partir de là, la composition des forces se fait en négligeant complètement ces réactions négatives, attendu qu'il est prudent, et c'est devenu une règle, de refuser à la maçonnerie tout travail à l'extension.

8. Dans son magistral traité de *Statique graphique*, Maurice Lévi détermine pour des voûtes sphériques de mince épaisseur, la position du point neutre. Il donne la valeur $51^{\circ}49'$ comme inclinaison du point par rapport à la verticale, pour le cas de $\varphi = 0$, c'est-à-dire pour une voûte complète sans ouverture au centre.

Nous avons trouvé, par une méthode très simple, une équation qui donne la position du point neutre pour toutes les valeurs de l'angle φ , c'est-à-dire quelle que soit l'ouverture libre de la voûte au sommet.

En désignant par φ le demi-angle de l'ouverture au sommet, et par $x + \varphi$ l'angle qui détermine le point neutre, on a l'équation suivante :

$$(1) \quad 2 \cos(x + \varphi) - \cos^3(x + \varphi) = \cos \varphi.$$

Pour obtenir cette équation on exprime tout simplement que, pour une sphère de rayon égal à l'unité, le poids p de la partie de fuseau AB est proportionnel à sa projection A'B' sur le diamètre vertical, c'est-à-dire

$$p = \cos \varphi - \cos(x + \varphi)$$

et en admettant que la résultante des forces sur le joint B soit perpendiculaire à ce joint, c'est-à-dire à la direction du rayon OB, on obtient, à cause de l'équilibre des forces,

$$\cos \varphi - \cos(x + \varphi) = \Sigma H \operatorname{tang}(x + \varphi)$$

or le point neutre correspond au point où les composantes horizontales H

commencent à changer de sens; il suffit donc de déterminer le maximum de ΣH , qui s'obtient en égalant à zéro la dérivée de l'expression

$$(2) \quad \frac{\cos \varphi - \cos (x + \varphi)}{\operatorname{tang} (x + \varphi)}$$

Ce qui donne justement l'équation

$$2 \cos (x + \varphi) - \cos^3 (x + \varphi) = \cos \varphi.$$

En faisant $\varphi = 0$, nous retombons dans le cas particulier examiné par Maurice Lévy.

On obtient en effet :

$$(3) \quad 2 \cos x - \cos^3 x = 1$$

qui a justement pour racine réelle

$$x = 51^{\circ}49'.$$

Pour former un tableau donnant les valeurs de $x + \varphi$ pour des valeurs données de φ , on aurait à résoudre un certain nombre de fois l'équation du 3^e degré trouvée :

$$2 \cos (x + \varphi) - \cos^3 (x + \varphi) = \cos \varphi.$$

Il est plus commode et plus expéditif d'adopter le procédé inverse, à savoir : on se donne à l'avance une série de valeurs de l'inconnue, c'est-à-dire $x + \varphi$, et l'on détermine les valeurs de φ qui leur correspondent.

Nous avons ainsi formé le tableau suivant :

$x + \varphi$	φ
51°49'	0
52°	3°30'
53°	9°30'
54°	13°20'
55°	16°30'
60°	29°
65°	39°30'
70°	50°
75°	60°
80°	70°
85°	80°
90°	90°

Il est très facile de remarquer que pour φ ne dépassant pas trop 16° , la valeur de $x + \varphi$ correspondante peut s'exprimer approximativement par la formule suivante :

$$(4) \quad 51^\circ 49' + \frac{\varphi}{3} = x + \varphi$$

et pour des valeurs de φ comprises entre 16° et 90° par cette autre formule

$$(5) \quad 45^\circ + \frac{\varphi}{2} = x + \varphi.$$

Nous signalons tout particulièrement ces deux formules, qui permettent de déterminer la position du point neutre avec une approximation suffisante pour la pratique et une extrême facilité.

9. C'est en dessous du point neutre qu'il convient de poser des tirants ou des chainages à la voûte; au-dessus de ce point ils seraient nuisibles. En outre, le poids P d'un onglet de la voûte étant déterminé, on obtient la somme des composantes horizontales par l'expression :

$$(6) \quad \Sigma H = \frac{P}{\text{tang}(x + \varphi)} = 2 T \sin \frac{\pi}{n}$$

qui peut s'écrire

$$(7) \quad \Sigma H = T \frac{2\pi}{n}$$

n étant supposé très grand et représentant le nombre d'onglets semblables formant toute la voûte.

La section S des chainages pour un travail unitaire σ sera donnée par

$$(8) \quad S = \frac{\Sigma H}{\frac{2\pi}{n} \sigma}$$

10. Remarquons encore que toutes nos formules précédentes s'appliquent tout aussi bien aux coupôles ogivales qu'à toutes celles qui sont engendrées par la révolution d'une génératrice assimilable à un arc de cercle. Les valeurs de φ et $x + \varphi$ doivent être comptées naturellement par rapport à l'axe vertical qui passe par le centre de l'arc de cercle générateur.

Ainsi, par exemple, pour l'ogive circonscrite au triangle équilatéral, la valeur de φ est 30° .

$x + \varphi$ sera donc $\frac{1}{2} 30 + 45 = 60^\circ$ et $x = 30^\circ$. Le point neutre se trouve donc sur la bissectrice de l'angle à la base.

11. Dans le cas où l'épaisseur de la coupole irait en augmentant de la valeur e à la partie supérieure A jusqu'à la valeur E au niveau du plan équatorial, la formule qui donnerait le point neutre, en tenant compte de l'ouverture 2φ au sommet, s'obtiendrait en cherchant le maximum de l'expression suivante :

$$2\pi R \left[ep + \frac{1}{2} (E - e) \frac{p^2}{R} \right] \frac{1}{\text{tang}(x + \varphi)}$$

dans laquelle R est le rayon de la ligne médiane des voussoirs (voir pl. III)

$$\text{et } p = R [\cos \varphi - \cos(x + \varphi)].$$

En posant $E = ne$, divisant l'expression par $2\pi R^2 e$ et posant

$$\frac{1}{2} \frac{n-1}{\cos \varphi} = K \quad \text{il vient :}$$

$$A = \frac{\cos \varphi - \cos(x + \varphi) + K [\cos \varphi - \cos(x + \varphi)]^2}{\text{tang}(x + \varphi)}$$

Le coefficient K dépend, comme on le voit, de n et $\cos \varphi$ qui sont donnés.

En égalant la dérivée à zéro, on pourrait établir un nomogramme, qui donnerait en fonction de K et de φ les valeurs de $x + \varphi$ correspondant au point neutre.

12. Revenons ⁽¹⁾ à la coupole de Goûr Émir et faisons abstraction, pour le moment, des contreforts (voir pl. IV).

Nous relevons que la valeur de φ est $22^\circ 47'$.

$$e = 0,70$$

$$E = 1,90$$

$$\cos \varphi = 0,922$$

$$\text{Donc } K = 0,935$$

⁽¹⁾ Nous tenons à remercier ici M. J. Lévy, Ing. E. S. T. P., d'avoir bien voulu faire les tracés des épures.

Pour ces valeurs, le maximum de l'expression A correspond à $x + \varphi = 65^{\circ}10'$ environ. Le tracé graphique indique 66° et correspond au joint n° 9.

a) La pression sur ce joint n° 9 est de 0 kilogr. 800 c/m^2 .

Nous supposons, bien entendu, que la maçonnerie est homogène et que le poids spécifique du mètre cube est de 2000 kilogrammes, ce qui est plutôt forcé.

b) Sur le joint n° 14, qui passe par l'horizontale menée par le centre de courbure, le travail maximum à la compression est de 2 kilogr. 18 par centimètre carré.

Le travail minimum à la compression, 0 kilogr. 24 c/m^2 .

c) Sur le joint n° 17 à la base :

Maximum compression.....	5 kilogr. 5 c/m^2 .
— extension.....	1 kilogr. 8 c/m^2 .

En supposant le poids spécifique beaucoup plus réduit, soit 1200 kilogrammes par mètre cube, le travail est encore de :

Maximum compression. + 3 kilogr. 3 c/m^2	+ 3 kilogr. 3 c/m^2 .
— extension... - 1 kilogr. 1 c/m^2	- 1 kilogr. 1 c/m^2 .

13. *Faisons intervenir les contreforts :*

Maximum compression..... + 2,23	} sur le joint n° 14.
Minimum compression..... + 0,52	

La stabilité est encore parfaite.

c) Sur le joint n° 17 à la base, nous avons :

Maximum compression.....	+ 2,82
— extension.....	- 0,89

Si le poids spécifique se réduit à 1200 kilogrammes, on aurait :

Maximum compression.....	+ 1 kilogr. 70 c/m^2 .
— extension.....	- 0 kilogr. 53 c/m^2 .

Nous voyons que l'effet des contreforts est de réduire presque de moitié le travail des maçonneries.

La détermination de ces efforts dans la maçonnerie a été faite soigneusement par l'application du noyau *central*.

Nous pouvons, en tout cas, admettre comme certain que *le travail d'extension*, malgré la présence des contreforts, est compris entre 0 kilogr. 5 et 1 kilogramme par centimètre carré dans la section à la base, joint n° 17.

Ce fait rend nécessaire l'emploi de tirants et de chaînages; car il est indispensable d'éliminer tout travail d'extension dans les maçonneries. Nos déductions confirment donc les conclusions de M. Creswell, exposées dans sa conférence de février 1922.

L'effet des tirants devrait même non seulement annuler les efforts d'extension, mais aussi engendrer des efforts de compression en ramenant la résultante à l'intérieur du noyau central. La stabilité en est de ce fait beaucoup améliorée à cause de la marge de sécurité qui en résulte.

Nous ne connaissons pas la section exacte des tirants, ni des chaînages employés pour cette coupole et encore moins les qualités du métal qui les constitue.

Nous pouvons, tout au plus, dire d'après notre épure quel est l'effort qui leur est demandé. Mais ce résultat perd de son intérêt à cause du manque des autres éléments. Nous avons néanmoins tracé la courbe des pressions en supposant que les tirants la ramènent à l'intérieur du noyau central.

14. Expliquons maintenant l'observation que nous avons faite dans la séance de février au sujet de ces tirants.

Ces tirants se réunissent sur le petit massif central.

D'après le dessin, ils sont inclinés suivant un angle d'environ 12 degrés par rapport à l'horizontale.

Or nous disons que cet angle était d'abord plus petit, et qu'au fur et à mesure que la maçonnerie de la coupole s'élevait, le nœud central des tirants aussi a été graduellement surélevé, annulant ainsi les efforts d'extension qui se développaient dans la maçonnerie.

L'œil expert du constructeur suffisait à régler ce véritable mécanisme d'équilibre. Cela était très facile.

Supposons, en effet, un angle α assez petit, et exprimons par n le rapport entre la base l et la hauteur h du triangle rectangle dont l'angle opposé à h serait justement α ; nous aurons, s étant l'hypoténuse :

$$s^2 = h^2 + n^2 h^2$$

Différentions et remarquons que s est égal à nh pour n très grand; nous aurons :

$$\frac{ds}{dh} = n^2$$

Supposons $n = 20$, ce qui correspond à une inclinaison de 3 degrés, on aurait :

$$ds = 400 dh.$$

Cela signifie que pour obtenir un allongement, égal à l'unité, très petit, suivant le tirant, il faudrait surélever 400 fois d'autant le nœud central.

On produit donc l'effet d'un levier d'autant plus efficace que n est plus grand, c'est-à-dire que l'inclinaison des tirants est plus petite.

Il suffirait donc d'un effort dans le sens vertical de $2 \times 45 = 90$ kilogrammes pour produire dans le tirant un effort de

$$45 \text{ kilogrammes} \times 400 = 18 \text{ tonnes.}$$

Ces 18 tonnes représentent approximativement l'effort demandé aux tirants pour annuler le travail à l'extension dans les maçonneries.

Il faut remarquer que cet effort vertical augmente très rapidement avec l'inclinaison du tirant. Il y a donc intérêt à donner une très forte section aux tirants, de manière à diminuer l'allongement élastique.

C'est ce qui semble avoir été fait pour les tirants de la coupole en question.

Il est probable que les tirants du Goûr Émir ont une section carrée de 8 à 10 centimètres de longueur de côté.

15. *En somme*, les contreforts sont nécessaires comme aussi les chaînages et tirants, pour la stabilité de la voûte.

L'effet utile se répartit à peu près également entre les deux. Les contreforts ramènent la résultante de 0,46 et les tirants encore de 0,44 vers le

centre du noyau central dans la section de base. La répartition est parfaite, sauf peut-être sur le pied-droit. Il semble donc qu'une légère surtension des tirants serait nécessaire.

La stabilité atteint donc tout juste les limites permises par les règles de l'art moderne.

On peut proclamer l'habileté du constructeur du Goûr Émir pour les conceptions essentielles de statique adoptées, mais une plus grande marge de sécurité aurait été à désirer.

Néanmoins cette coupole est trop massive. Et ce qui le prouve, outre l'impression qu'on en reçoit, c'est le travail excessivement bas des maçonneries. Nous avons vu en effet que le travail maximum n'atteint certainement pas 3 kilogrammes par centimètre carré pour un poids spécifique de la maçonnerie égal à 2000 kilogrammes et sans tenir compte de l'influence des tirants.

Elle est imposante par sa masse mais n'est pas hardie comme structure. Il est vrai qu'il ne faut pas oublier les tassements des fondations, les tremblements de terre et la pression du vent.

Cette coupole a un diamètre intérieur de 12 mètres. A titre de comparaison nous ajoutons que dans la Mole Antonelliana, à Turin, le travail des maçonneries sous la coupole atteint près de 42 kilogrammes par centimètre carré. Mais c'est un monument très moderne (il date de 1880) et il est d'une hardiesse exceptionnelle. Elle couvre une base carrée de 25 mètres de côté.

La coupole de la mosquée du sultan Hassan, près de la Citadelle du Caire, présente un diamètre de 20 mètres environ.

La coupole de Saint-Pierre à Rome, la plus grande de toutes, a un diamètre intérieur de 42 m. 50.

La coupole des Invalides à Paris présente un diamètre de 32 mètres.

Le travail des maçonneries dans ces différents édifices est généralement compris entre 8 et 16 kilogrammes par centimètre carré.